ECONOMETRÍA
APLICADA UTILIZANDO R.

PAPIME PE302513 LIBRO ELECTRÓNICO Y COMPLEMENTOS DIDÁCTICOS EN MEDIOS COMPUTACIONALES, PARA EL FORTALECIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LA ECONOMETRÍA

Capítulo 12.
Modelos ARCH
Luis Quintana Romero.

Objetivo

Mediante los modelos ARCH el objetivo central de este capitulo es facilitar la identificación de la volatilidad en las variables económicas y , de esa manera formular modelos para su predicción.

Se retomaran algunas características de las propiedades de las series de tiempo estudiadas en el capitulo anterior, las cuales son indispensables para formular los modelos de Autocorrelación Condicional Heterocedástica (ARCH).

Introducción

El estudio de fenómenos económicos en los cuales hay una gran volatilidad en las variables ha llevado a poner especial interés en la forma en que tal volatilidad puede ser identificada y separada de otros componentes que influyen en el comportamiento de las variables.

En el análisis de los mercados financieros el estudio del riesgo es altamente relevante. Harry Markowitz(1952), a través de la teoría del portafolio, realizo la fundamentación mas influyente sobre la medición del riesgo en esos mercados, entendiendo como riesgo la varianza del rendimiento de un activo.

Para cualquier inversionista o interesado en el comportamiento del mercado financiero, le resultaría muy útil poder separa esos momentos de volatilidad del comportamiento temporal del rendimiento, con el fin de tomar decisiones mejor informadas de inversión con el fin de reducir el riesgo de las mismas o para intentar predecir el comportamiento futuro de los procesos de la volatilidad y, de esa manera, minimizar el riesgo esperado a futuro.

1. Procesos ARCH

Para ilustrar el significado de los momentos condicionales y no condicionales de un proceso estocástico consideraremos en caso mas simple de un proceso AR(1) estacionario. $Y_{t=} \emptyset_1 Y_{t-1} + U_t$

donde 0 < $\emptyset_1$ < 1, siendo U_t~iid(0,σ^2)

Los momentos condicionales de este proceso dependen de los valores pasados de Yt, dado que el proceso es autorregresivo de primer orden la información del pasado se limita a la existente en el periodo inmediatamente anterior Y_{t-1}.

Por lo tanto, al tomar la esperanza matemática condicional del proceso vamos a obtener:

$$E_{t-1}[y_t] = E[y_t|y_{t-1}, y_{t-2} \dots,] = E[y_t|y_{t-1}] = E[\emptyset_1 y_{t-1} + u_t] = \emptyset_1 y_{t-1}$$

Por su parte la varianza condicional sería la siguiente expectativa:

$$var_{t-1}[y_t] = E\left[\left(y_t - E(y_t)\right)^2 |y_{t-1}, y_{t-2} \dots,\right] = E[(y_t - \emptyset_1 y_{t-1})^2|y_{t-1}] = E[{u_t}^2] = \sigma^2$$

Los momentos no condicionales ya no dependen de las realizaciones en el tiempo de y_t , y toda la información procede del término de perturbación aleatoria.

Para la media no condicional tenemos:

$$y_t - \emptyset_1 y_{t-1} = u_t$$
$$y_t(1 - \emptyset_1 L) = u_t$$
$$y_t = (1 - \emptyset_1 L)^{-1} u_t = (1 + \emptyset_1 L + \emptyset_1^2 L^2 + \cdots)u_t$$
$$y_t = u_t + \emptyset_1 u_{t-1} + \emptyset_1^2 u_{t-2} + \cdots$$
$$E(y_t) = 0$$

Para la varianza no condicional:

$$var(y_t) = E(u_t + \emptyset_1 u_{t-1} + \emptyset_1^2 u_{t-2} + \cdots)^2$$

$$= E\left({u_t}^2 + {\emptyset_1}^2 {u_{t-1}}^2 + \emptyset_1^4 {u_{t-2}}^2 + \cdots + productos\ cruzados\right)$$

$$= \sigma^2 + {\emptyset_1}^2 \sigma^2 + \emptyset_1^4 \sigma^2 + \cdots = \sigma^2\left(1 + {\emptyset_1}^2 + \emptyset_1^4 + \cdots\right) = \frac{\sigma^2}{1 - {\emptyset_1}^2}$$

Los productos cruzados en la operación previa son nulos en virtud de que los términos de perturbación aleatoria son independientes en el tiempo.

En su trabajo fundamental sobre los procesos ARCH, Engle (1982) plantea que los intervalos de predicción de un proceso estocástico podrían mejorar si pudiéramos utilizar más información para la predicción de la varianza. El modelo propuesto por Engle es el siguiente:

$$y_t = u_t$$

$$u_t = v_t h_t^{1/2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

siendo $v_t \sim N(0,1)$ y $y_t | \Theta_{t-1} \sim N(0, h_t)$ siendo Θ_t el conjunto de información disponible en t.

2. Variantes de los modelos ARCH

Cuando se utiliza un modelo GARCH(1,1) para que tenga varianza finita se debe cumplir la condición $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. En series financieras la volatilidad es persistente, por lo cual $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ y el proceso se convierte en un IGARCH o GARCH integrado que es estrictamente estacionario.

Si la variable de referencia es sensible a la volatilidad, ésta última tendrá que incorporarse como regresor en la ecuación de la media, el resultado será un modelo ARCH en media o ARCH-M como el siguiente (Wang, 2003):

$$y_t = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \gamma h_t + u_t$$
$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2$$

En el cual se utilizan m variables exógenas x, las cuales podrían incluir rezagos autorregresivos de y. El mismo modelo ARCHM podría generalizarse a un GARCHM.

Antes se mencionó que los modelos ARCH suponen simetría en los choques aleatorios sean positivos o negativos. Sin embargo, en el mercado financiero y con muchas variables económicas, las noticias negativas no tienen el mismo peso que las positivas, por lo tanto el efecto de los choques aleatorios debe de ser asimétrico.

Un modelo que captura dicha asimetría es el exponencial generalizado o EGARCH propuesto por Nelson (1991) con la siguiente especificación:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log(h_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^{p} \left\{ \alpha_i \left(\left| \frac{u_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) - \zeta_i \frac{u_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right\}$$

Donde ζ_i es el parámetro de respuesta asimétrica y se espera que sea positivo, de forma que choques negativos incrementarán la volatilidad y los positivos la reducirán.

Finalmente, Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) consideraron que el EGARCH por su no linealidad era difícil de estimar, propusieron el GARCH de umbral o TGARCH.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \left(h_{t-j}^2\right) + \sum_{i=1}^{p} \left\{\alpha_i u_{t-i}^2 + \delta_i u_{t-i}^2\right\}$$

En este caso el parámetro δ_i captura la respuesta asimétrica, dando lugar a que un choque negativo genera mayor o al menos igual volatilidad que la de un choque positivo.